Capitolo 2

Equazioni Differenziali in Campo Complesso

2.1 Equazioni differenziali ordinarie del secondo'ordine

La forma più generale di equazione differenziale ordinaria del II ordine omogenea è

$$A(z)u''(z) + B(z)u'(z) + C(z)u(z) = 0 \ . \tag{2.1}$$

Dividendo per $A(z)$ (supposto diverso da zero, altrimenti l'equazione sarebbe del I ordine) si ottiene la cosiddetta *forma standard*

$$u''(z) + P(z)u'(z) + Q(z)u(z) = 0 \ . \tag{2.2}$$

Punti singolari e regolari di un'equazione differenziale

Consideriamo la forma (2.2) di un'equazione differenziale del II ordine omogenea. Le proprietà delle soluzioni dipendono dal comportamento delle funzioni $P(z)$ e $Q(z)$ nel campo complesso; se esse sono regolari nel punto $z = z_0$, il punto z_0 si dice punto *regolare*, o *ordinario*, dell'equazione differenziale. Altrimenti il punto z_0 si dice punto *singolare* dell'equazione differenziale. I punti singolari sono a loro volta classificati in due categorie: *singolarità fuchsiane, o regolari,* e *singolarità essenziali, o irregolari.* Il punto singolare z_0 si definisce punto singolare fuchsiano (dal nome del matematico Fuchs) se in $z \to z_0$ $P(z)$ ha al più un polo semplice e $Q(z)$ al più un polo doppio; quindi le funzioni $(z-z_0)P(z)$ e $(z-z_0)^2Q(z)$ rimangono finite per $z \to z_0$:

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)P(z) = p_0$$

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^2Q(z) = q_0 \ ,$$

con p_0 e q_0 finiti; è possibile che uno o anche entrambi siano nulli. Se invece per esempio $P(z)$ diverge più velocemente di $1/(z-z_0)$, in modo tale che $(z-z_0)P(z)$ tenda a infinito per $z \to z_0$, oppure se $Q(z)$ diverge più velocemente di $1/(z-z_0)^2$, in modo tale che $(z-z_0)^2Q(z)$ tenda a infinito per $z \to z_0$, il punto z_0 è un punto singolare irregolare, o essenziale. Queste definizioni valgono per tutti i valori finiti di z_0. Lo studio del punto $z \to \infty$ verrà trattato separatamente in un prossimo paragrafo.

- **Esempi**

Elenchiamo alcuni esempi di equazioni differenziali ordinarie del II ordine e studiamone le singolarità al finito.

1) Equazione dell'oscillatore armonico semplice:

$$u'' + \omega^2 u = 0 \tag{2.3}$$

$$P(z) = 0 \quad , \quad Q(z) = \omega^2$$

L'equazione è ovunque regolare al finito.

2) Equazione di Legendre:

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + \alpha u = 0 \tag{2.4}$$

$$P(z) = -\frac{2z}{1-z^2} \quad , \quad Q(z) = \frac{\alpha}{1-z^2}$$

L'equazione ha due punti singolari fuchsiani in $z = \pm 1$. Infatti sia $P(z)$ che $Q(z)$ hanno un polo semplice in $z = \pm 1$:

$$\lim_{z\to\pm 1}(z-(\pm 1))P(z) = 1 = p_0$$

$$\lim_{z\to\pm 1}(z-(\pm 1))^2Q(z) = 0 = q_0 \ .$$

3) Equazione di Bessel:

$$z^2u'' + zu' + (z^2 - \alpha^2)u = 0 \tag{2.5}$$

$$P(z) = \frac{1}{z} \quad , \quad Q(z) = 1 - \frac{\alpha^2}{z^2}$$

L'equazione ha una singolarità di tipo fuchsiano in $z = 0$ con $p_0 = 1$ e $q_0 = -\alpha^2$.

4) Equazione di Laguerre

$$zu'' + (1 - z)u' + au = 0 \tag{2.6}$$

$$P(z) = \frac{1}{z} - 1 \quad , \quad Q(z) = \frac{a}{z}$$

L'equazione ha una singolarità di tipo fuchsiano in $z = 0$.

5) Equazione di Hermite:

$$u'' - 2zu' + 2\alpha u = 0 \tag{2.7}$$

$$P(z) = -2z \quad , \quad Q(z) = 2\alpha$$

L'equazione è regolare al finito.

6) Equazione di Chebyshev:

$$(1 - z^2)u'' - zu' + n^2u = 0 \tag{2.8}$$

$$P(z) = -\frac{z}{1 - z^2} \quad , \quad Q(z) = \frac{n^2}{1 - z^2}$$

L'equazione ha due punti singolari fuchsiani in $z = \pm 1$.

7) Equazione ipergeometrica:

$$z(z - 1)u'' + [(1 + a + b)z - c]u' + abu = 0 \tag{2.9}$$

$$P(z) = -\frac{(1 + a + b)z - c}{z(z - 1)} \quad , \quad Q(z) = \frac{ab}{z(z - 1)}$$

L'equazione ha due punti singolari fuchsiani in $z = 0$ e $z = 1$.

8) Equazione ipergeometrica confluente:

$$zu'' + (c - z)u' - au = 0 \tag{2.10}$$

$$P(z) = -\frac{c - z}{z} \quad , \quad Q(z) = -\frac{a}{z}$$

L'equazione ha un punto singolare fuchsiano in $z = 0$.

2.1.1 Soluzione nell'intorno di un punto regolare

Se z_0 è un punto ordinario di un'equazione differenziale, è possibile cercare una soluzione che abbia la forma di uno sviluppo in serie di Taylor intorno al punto z_0,

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k \ , \tag{2.11}$$

con $w \equiv z - z_0$, e determinare i coefficienti c_k mediante la sostituzione della serie nell'equazione differenziale. Poiché $P(z)$ e $Q(z)$ sono analitiche in z_0 valgono gli sviluppi in serie di Taylor

$$P(z) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l w^l \tag{2.12}$$

$$Q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l w^l \ . \tag{2.13}$$

Sostituendo le (2.12) e (2.13) e le derivate di $u(z)$

$$u'(z) = \sum_{l=1}^{\infty} l c_l w^{l-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} w^n \tag{2.14}$$

$$u''(z) = \sum_{l=2}^{\infty} l(l-1) c_l w^{l-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) c_{n+2} w^n \tag{2.15}$$

nell'equazione differenziale (2.2) si ottiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1)(n+2) c_{n+2} + \sum_{l=0}^{n} (l+1) c_{l+1} p_{n-l} + \sum_{l=0}^{n} c_l q_{n-l} \right] w^n = 0 \ . \tag{2.16}$$

Da questa si ottengono delle relazioni di ricorrenza che permettono di determinare i coefficienti c_k una volta noti c_0 e c_1. Infatti per $n = 0$ si ottiene:

$$2c_2 + c_1 p_0 + c_0 q_0 = 0 \ ; \tag{2.17}$$

per $n = 1$:

$$6c_3 + c_1 p_1 + 2c_2 p_0 + c_0 q_1 + c_1 q_0 = 0 \tag{2.18}$$

e così via. Le costanti arbitrarie c_0 e c_1, fissate dalle condizioni iniziali

$$c_0 = u(z_0) \tag{2.19}$$

$$c_1 = u'(z_0) \ , \tag{2.20}$$

determinano univocamente la soluzione $u(z)$. Se per esempio u_1 è la soluzione corrispondente a $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$ e u_2 quella corrispondente a $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$, la soluzione generale dell'equazione differenziale sarà

$$u(z) = c_0 u_1(z) + c_1 u_2(z) \; ; \tag{2.21}$$

infatti u_1 e u_2 sono linearmente indipendenti, essendo il *Wronskiano* diverso da zero:

$$W(z_0) = \det \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}_{z=z_0} = \det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; .$$

In generale si può dimostrare che questo metodo fornisce sempre la soluzione generale nell'intorno di un punto regolare z_0 e che, per valori generici di c_0 e c_1 il raggio di convergenza della serie è uguale alla distanza fra z_0 e la singolarità più vicina dell'equazione differenziale (talvolta, ma solo per particolari valori di c_0 e c_1, può anche essere maggiore).

- **Esempi**:

- L' equazione dell'oscillatore armonico semplice

$$u''(z) + \omega^2 u(z) = 0 \; , \tag{2.22}$$

è, come si è detto, regolare per ogni z finito, in particolare per $z = 0$. Possiamo quindi cercare una soluzione del tipo

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \; .$$

Derivando questa serie si ottiene:

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k z^{k-1}$$

$$u''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-2} = \sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1) z^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(k+1)(k+2) z^k \; ,$$

dove nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambiamento di indice $k \to k-2$. Sostituendo nella (2.22) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big[c_{k+2}(k+1)(k+2) + \omega^2 c_k \Big] \, z^k = 0 \ . \tag{2.23}$$

Una serie di potenze è nulla se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli. Uguagliando a zero i coefficienti della (2.23) si ottiene una *relazione di ricorrenza* per i coefficienti c_k:

$$c_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+1)(k+2)} c_k \ . \tag{2.24}$$

Dati i coefficienti c_0 e c_1, che saranno determinati dalle condizioni al contorno, la (2.24) permette di costruire tutti i coefficienti delle potenze pari

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{\omega^2}{2} c_0 \\
c_4 &= -\frac{\omega^2}{(3)(4)} c_2 = \frac{(\omega^2)^2}{4!} c_0 \\
c_6 &= -\frac{\omega^2}{(5)(6)} c_4 = -\frac{(\omega^2)^3}{6!} c_0 \\
c_{2n} &= (-1)^n \frac{(\omega^2)^n}{(2n)!} c_0
\end{aligned}$$

e delle potenze dispari

$$\begin{aligned}
c_3 &= -\frac{\omega^2}{(2)(3)} c_1 \\
c_5 &= -\frac{\omega^2}{(4)(5)} c_3 = \frac{(\omega^2)^2}{5!} c_1 \\
c_7 &= -\frac{\omega^2}{(6)(7)} c_5 = -\frac{(\omega^2)^3}{7!} c_1 \\
c_{2n+1} &= (-1)^n \frac{(\omega^2)^n}{(2n+1)!} c_1 \ .
\end{aligned}$$

Pertanto la soluzione cercata è

$$\begin{aligned}
u(z) &= c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{c_1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= c_0 \cos(\omega z) + c_1' \sin(\omega z) \ ,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

che è proprio, come noto, la soluzione dell'equazione (2.22).

- L'equazione di Legendre

$$(1-z^2)u''(z) - 2zu'(z) + \alpha u(z) = 0 \ . \tag{2.26}$$

Poichè il punto $z = 0$ è un punto regolare dell'equazione, cercheremo una soluzione data dalla serie:

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ . \tag{2.27}$$

Per determinare i coefficienti calcoliamo le derivate

$$u'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k z^{k-1} \tag{2.28}$$

$$u''(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) c_k z^{k-2} \tag{2.29}$$

e sostituiamole nella (2.26):

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[k(k-1) + 2k - \alpha\right] z^k = 0 \ . \tag{2.30}$$

La prima sommatoria si può riscrivere come segue (si noti che i termini $k = 0, 1$ sono nulli):

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k z^{k-2} = \sum_{k'=0}^{\infty} (k'+2)(k'+1)c_{k'+2} z^{k'} \ ;$$

l'equazione (2.30) diventa quindi:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_k\left[k(k+1) - \alpha\right]\right\} z^k = 0 \ .$$

Uguagliando a zero ogni coefficiente della serie di potenze si ottiene la relazione di ricorrenza:

$$c_{k+2} = c_k \frac{k(k+1) - \alpha}{(k+2)(k+1)} \ ,$$

da cui si ricava per α generico

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{-\alpha}{2} c_0 \\
c_4 &= \frac{6-\alpha}{12} c_2 = \frac{(6-\alpha)(-\alpha)}{4!} c_0 \\
c_6 &= \frac{20-\alpha}{30} c_2 = \frac{(20-\alpha)(6-\alpha)(-\alpha)}{6!} c_0
\end{aligned}$$

etc...

e

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{2-\alpha}{6} c_1 \\
c_5 &= \frac{12-\alpha}{20} c_3 = \frac{(12-\alpha)(2-\alpha)}{5!} c_1 \\
c_7 &= \frac{30-\alpha}{42} c_5 = \frac{(30-\alpha)(12-\alpha)(2-\alpha)}{6!} c_1 \\
etc...
\end{aligned}
$$

Quindi se scegliamo $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$ tutti i coefficienti delle potenze dispari nella (2.27) sono nulli e la soluzione è pari ($u(z) = u(-z)$), mentre per $c_0 = 0$ e $c_1 = 1$ la soluzione è dispari ($u(z) = -u(-z)$). Notiamo anche che, poiché il il raggio di convergenza della serie (2.27) è

$$
\lim_{k\to\infty} \frac{c_k}{c_{k+2}} = 1 \ , \tag{2.31}
$$

ci aspettiamo almeno una singolarità sulla circonferenza $|z| = 1$: l'equazione ha infatti due punti singolari fuchsiani in $z = \pm 1$. Le soluzioni trovate valgono $\forall \alpha \in \mathbf{C}$. Ora, se e solo se $\alpha = n(n+1)$, con n intero positivo o nullo, il coefficiente c_{n+2} è nullo e così $c_{n+4} = c_{n+6} = \cdots = 0$; la serie (2.27) si riduce così a un *polinomio di grado* n:

$$
P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \tag{2.32}
$$

se n è pari per $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$, oppure se n è dispari per $c_0 = 1$ e $c_1 = 0$. Per c_0 e c_1 generici la soluzione generale è la combinazione lineare di un polinomio e una serie. I polinomi (2.32) (opportunamente normalizzati) si chiamano *polinomi di Legendre* e sono regolari in tutto il piano complesso. Si noti che la condizione al contorno che $u(z)$ sia finita in tutto l'intervallo [-1,1] seleziona gli $\alpha = n(n+1)$, in accordo con quanto si vedrà in generale nel capitolo 5 a proposito degli autovalori di operatori differenziali.

- L'equazione di Hermite

$$
u'' - 2zu' + 2\alpha u = 0 \tag{2.33}
$$

Poiché l'equazione è regolare in $z = 0$ cerchiamo una soluzione

$$
u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \ . \tag{2.34}
$$

Questa, sostituita con le sue derivate nella (2.33), fornisce

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left[k(k-1)z^{k-2} - 2kz^k + +2\alpha z^k\right] = 0 \ . \tag{2.35}$$

Il primo termine della serie può essere riscritto, cambiando l'indice sommato k in $n = k - 2$, come:

$$\sum_{k=2}^{\infty} c_k k(k-1)z^{k-2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2}(n+2)(n+1)z^n \tag{2.36}$$

e sostituendo nella (2.35) si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \left[c_{k+2}(k+2)(k+1) + c_k(2\alpha - 2k)\right] = 0 \ , \tag{2.37}$$

da cui si ricava la relazione di ricorrenza

$$c_{k+2} = c_k \frac{2(k-\alpha)}{(k+2)(k+1)} \ . \tag{2.38}$$

L'eq. (2.38) mostra che la serie (2.34) ha raggio di convergenza infinito. Scegliendo $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ oppure $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ si ottengono soluzioni pari o dispari, come si è visto per i polinomi di Legendre. Se $\alpha = n$ è intero positivo o nullo, una delle due serie (quella pari se α è pari, quella dispari se α è dispari) si riduce a un polinomio di grado n, il *polinomio di Hermite* H_n.